Coordonator
GHEORGHE BOROICA

Nicolae Muşuroia

Gheorghe Boroica

MATEMATICĂ DE EXCELENŢĂ

pentru concursuri, olimpiade şi centre de excelenţă

Clasa a XII-a

Volumul II. Analiză matematică

Ediţia a II-a, revizuită

ÎNVĂȚARE DE EXCELENȚĂ®
supersucces

PARALELA 45
EDITURA

CUPRINS

TESTE INIŢIALE

TESTUL I.1

I.1.1. Stabiliţi dacă există o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilă şi care să verifice relaţia $f' \circ f = 1_{\mathbb{R}}$.

I.1.2. a) Arătaţi că, dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e o funcţie periodică şi există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c \in \mathbb{R}$, atunci $f(x) = c$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) Determinaţi funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ştiind că $f(x + 2) + f(x) = 2f(x + 1)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, ştiind că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - x\right) = a \in \mathbb{R}$.

I.1.3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi progresiile aritmetice $a_1, a_2, \ldots, a_n$ şi $b_1, b_2, \ldots, b_n$ astfel încât $\sum\limits_{i=1}^{n} f(a_i) < 0$ şi $\sum\limits_{i=1}^{n} f(b_i) > 0$. Demonstraţi că există o progresie aritmetică $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pentru care $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i) = 0$.

Gheorghe Andrei, Olimpiada Judeţeană Constanţa, 1997

I.1.4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă cu $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ şi $f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in [0, \infty)$. Arătaţi că $f(x) \geq 3e^{2x} - 2e^{3x}$, $\forall\, x \in [0, \infty)$.

I.M.C., 2009

TESTUL I.2

I.2.1. Determinaţi funcţiile derivabile $f : I \to (0, \infty)$ şi intervalul $I \subset \mathbb{R}$, ştiind că $f(2) = 1$ şi $f^3(x) - 2f'(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

I.2.2. Arătaţi că, dacă în şirul coeficienţilor unui polinom având coeficienţii reali are loc o singură schimbare de semn, atunci acesta are cel puţin o rădăcină pozitivă.

I.2.3. Dacă $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ este o funcţie injectivă, calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{f^2(k)}{k^3}$.

Gheorghe Boroica

CAPITOLUL 1. FUNCŢII PRIMITIVABILE

Conceptul de primitivă a apărut în ştiinţă din nevoia de a cerceta comportarea globală a fenomenelor naturale descrise de unele funcţii având variaţie locală cunoscută.

Problemele concrete de fizică, chimie, biologie, geometrie – mai ales acelea care admit o modelare diferenţială – au impulsionat conturarea treptată a noţiunii de primitivă şi de integrală definită.

1.1. Definiţie. Fie $J \subset \mathbb{R}$ un interval neredus la un singur punct (J e interval nedegenerat). O funcţie $F : J \to \mathbb{R}$ se numeşte *primitivă* pe J a unei funcţii $f : J \to \mathbb{R}$ dacă F este derivabilă pe J şi $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in J$. Când punctul x din această definiţie este o extremitate a lui J, prin $F'(x)$ se notează derivata laterală a lui F în punctul x.

Se spune că o funcţie $f : J \to \mathbb{R}$ admite primitive pe J (f este primitivabilă pe J sau f este o derivată) dacă există o primitivă a lui f pe J.

Noţiunea de primitivă a fost introdusă de I. Newton (1665) sub denumirea de *fluentă*.

1.2. Observaţie. Notăm în continuare cu $P(J)$ mulţimea tuturor funcţiilor primitivabile pe J, cu $C(J)$ mulţimea tuturor funcţiilor continue pe J şi cu $\mathcal{D}_a(J)$ mulţimea tuturor funcţiilor ce au proprietatea lui Darboux pe J, J fiind un interval nedegenerat din $\mathbb{R}$.

Notăm în continuare cu J un interval nedegenerat din $\mathbb{R}$.

1.3. Propoziţie. Dacă funcţia $f : J \to \mathbb{R}$ admite o primitivă F pe J, atunci restricţia lui F la orice interval nedegenerat $I \subset J$ este o primitivă a restricţiei lui f la I.

1.4. Propoziţie. Dacă F şi G sunt două primitive ale aceleiaşi funcţii $f : J \to \mathbb{R}$, atunci există $k \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$F(x) - G(x) = k, \ \forall\, x \in J.$$

1.5. Teoremă. Dacă funcţia f este continuă pe intervalul nedegenerat J, atunci f are primitive pe J.

1.6. Observaţie. Din teorema anterioară rezultă că $C(J) \subset P(J)$. Facem precizarea că relaţia $P(J) \subset C(J)$ nu este în general adevărată, după cum se va putea observa din exemplul următor. Teorema anterioară se mai numeşte şi teorema fundamentală a calculului diferenţial şi integral.

1.7. Exemplu. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{\alpha}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$, are primitive pe $\mathbb{R}$.

Demonstraţie: Pentru $\alpha = 0$, funcţia f este funcţie nulă, deci f e continuă şi atunci f are primitive pe $\mathbb{R}$.

Pentru $\alpha \neq 0$, funcţia f e continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ şi în $x = 0$ are un punct de discontinuitate de speţa a doua. Integrând prin părţi pe orice interval ce nu conţine originea, obţinem:

$$\int \sin\left(\frac{\alpha}{x}\right) dx = \int \left(\cos\left(\frac{\alpha}{x}\right)\right)' \cdot \frac{x^2}{\alpha} dx = \frac{x^2}{\alpha} \cdot \cos\frac{\alpha}{x} - \int \frac{2x}{\alpha} \cdot \cos\frac{\alpha}{x} dx. \tag{1}$$

Aceasta ne sugerează considerarea funcţiei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\alpha} \cdot \cos\dfrac{\alpha}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Funcţia g fiind continuă pe $\mathbb{R}$, va exista G o primitivă pentru g. Folosind (1), deducem că o primitivă F pentru f va trebui să fie de forma $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\alpha} \cdot \cos\dfrac{\alpha}{x} - G(x) + c_1, & x \neq 0 \\ c_2, & x = 0 \end{cases}.$$

Din construcţia lui F avem că F e derivabilă pe $\mathbb{R}^*$ şi $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$. Din condiţia de continuitate a lui F în punctul $x = 0$ obţinem că

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\alpha} \cdot \cos\dfrac{\alpha}{x} - G(x) + c_1, & x \neq 0 \\ -G(0) + c_1, & x = 0 \end{cases}. \tag{2}$$

Atunci $F'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x}{\alpha} \cdot \cos\dfrac{\alpha}{x} - \dfrac{G(x) - G(0)}{x - 0}\right) = 0 - G'(0) = -g(0) =$ $= 0 = f(0)$, deci F e derivabilă şi în $x = 0$ şi $F'(0) = f(0)$. Aşadar, funcţia F dată de relaţia (2) este o primitivă pentru f. Atunci, pentru $\alpha \neq 0$, funcţia f este discontinuă şi are primitive pe $\mathbb{R}$.

1.8. Teoremă (Darboux, 1875). Dacă funcţia $f : J \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe J, atunci derivata sa f' are proprietatea lui Darboux pe J.

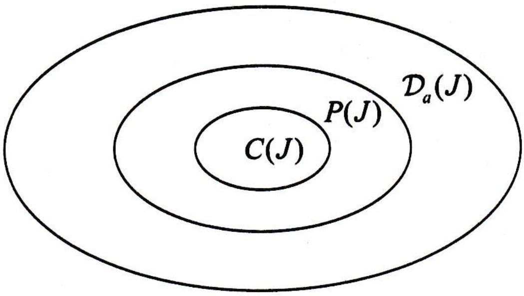
1.9. Propoziţie (condiţie necesară de existenţă a primitivelor)
Dacă funcţia $f : J \to \mathbb{R}$ are primitive pe J, atunci f are proprietatea lui Darboux pe J. Avem deci incluziunea $P(J) \subset \mathcal{D}_a(J)$.

Demonstrație: Din ipoteză rezultă că există F o primitivă pentru f. Atunci din teorema lui Darboux rezultă că F' are proprietatea lui Darboux, deci f are proprietatea lui Darboux pe J.

1.10. Observație. Reciproca proprietății anterioare nu este în general adevărată, adică $\mathcal{D}_a(J) \not\subset P(J)$. Acest lucru rezultă din următorul exemplu:

Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$, are proprietatea lui Darboux pentru $a \in [-1, 1]$ și are primitive pe $\mathbb{R}$ doar pentru $a = 0$.

Din cele spuse anterior rezultă că avem următoarea diagramă:



Așadar, $C(J) \subset P(J) \subset \mathcal{D}_a(J)$, incluziunile fiind stricte.

1.11. Consecință. Fie $J \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat și $f: J \to \mathbb{R}$ o funcție. Atunci avem:

1) Dacă f nu are proprietatea lui Darboux pe J, atunci f nu are primitive pe J.
2) Dacă $\operatorname{Im} f$ nu este interval, atunci f nu are primitive pe J.
3) Dacă f are un punct de discontinuitate de prima speță, atunci funcția f nu are primitive pe J.

1.12. Exemplu. Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$, nu are primitive pe $\mathbb{R}$.

Soluție: Avem că f este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ și $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 \neq f(0) = 2$, deci $x = 0$ este punct de discontinuitate de prima speță și atunci f nu are primitive pe $\mathbb{R}$.

1.13. Exemplu. Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$ nu are primitive pe $\mathbb{R}$, deoarece $\mathbb{R}$ e interval și $\operatorname{Im} f = f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$ nu este interval.

1.14. Propoziție. Dacă funcțiile $f, g : J \to \mathbb{R}$ au primitive pe J și $\lambda \in \mathbb{R}$, atunci și funcțiile $f + g, \lambda \cdot f, f - g$ au primitive pe J.

Demonstrație: Într-adevăr, dacă $F, G : J \to \mathbb{R}$ sunt primitive pentru f, respectiv g, atunci funcțiile $F + G, \lambda \cdot F$ și $F - G$ sunt primitive pentru $f + g, \lambda \cdot f$, respectiv $f - g$.

CONDIȚII SUFICIENTE CA UN PRODUS DE DOUĂ FUNCȚII PRIMITIVABILE SĂ FIE TOT O FUNCȚIE PRIMITIVABILĂ

Produsul a două funcții primitivabile nu este în general o funcție primitivabilă. Pentru aceasta se poate consulta problema 1A.6.

Vom da în continuare condiții suficiente pentru ca produsul a două funcții primitivabile să fie o funcție primitivabilă.

1.15. Propoziție. Fie $J \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat și $f, g : J \to \mathbb{R}$ două funcții având proprietățile:

1) f admite primitive pe J;
2) g e derivabilă cu derivata continuă pe J.

Atunci funcția $f \cdot g$ admite primitive pe J.

Demonstrație: Fie F o primitivă pe J și funcția $u : J \to \mathbb{R}$, $u(x) = g(x) \cdot F(x)$. Atunci u e derivabilă pe J și $u'(x) = g'(x) \cdot F(x) + g(x) \cdot f(x)$. Atunci $f \cdot g = u' - g' \cdot F$ are primitive pe J, fiind o diferență de două funcții primitivabile (prima are primitivă pe u, iar a doua are primitive, fiind continuă).

1.16. Propoziție. Fie $J \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat și $f, g : J \to \mathbb{R}$ două funcții având proprietățile:

1) f are primitive pe J;
2) $f(x) \neq 0$ pentru orice $x \in J$;
3) g e continuă pe J.

Atunci funcția $f \cdot g$ are primitive pe J.

Demonstrație: Fie $F : J \to \mathbb{R}$ o primitivă pentru f. Din $F'(x) = f(x) \neq 0$, $\forall\, x \in J$, rezultă că F' are semn constant pe J, deci F e strict monotonă. Considerăm funcția $H : J \to F(J)$, dată prin $H(x) = F(x)$, $\forall\, x \in J$. Funcția H astfel definită este derivabilă, surjectivă, injectivă (H este strict monotonă) și $H'(x) = F'(x) \neq 0$, $\forall\, x \in J$. Rezultă atunci că funcția inversă $H^{-1} : F(J) \to J$ este derivabilă.

Funcția $g \circ H^{-1} : F(J) \to \mathbb{R}$ are primitive, fiind continuă. Fie atunci $G : F(J) \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcției $g \circ H^{-1}$. Atunci funcția $G \circ H : J \to \mathbb{R}$ e derivabilă pe J (compunere

de funcţii derivabile) şi $(G \circ H)'(x) = G'(H(x)) \cdot H'(x) = (g \circ H^{-1})(H(x)) \cdot H'(x) =$
$= g(x) \cdot f(x)$, $\forall\, x \in J$. Aşadar, funcţia $G \circ H$ este o primitivă pentru funcţia $f \cdot g$.

1.17. Teoremă (W. Wilkosz). Fie $J \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat şi $f, g : J \to \mathbb{R}$ două funcţii având proprietăţile:

1) f admite primitive pe J;
2) f mărginită superior sau inferior;
3) g e continuă.

Atunci funcţia $f \cdot g$ admite primitive pe J.

Demonstraţie: Presupunem că f este mărginită inferior. Atunci există $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) > m$, $\forall\, x \in J$. Atunci funcţia $f - h$ admite primitive pe J şi nu se anulează pe J, unde $h : J \to \mathbb{R}$, $h(x) = m$. Conform propoziţiei anterioare, funcţia $(f - h) \cdot g$ are primitive pe J. Deoarece $h \cdot g$ are primitive pe J fiind continuă, deducem că şi $f \cdot g$ are primitive pe J. Analog se procedează dacă f este mărginită superior.

1.18. Propoziţie. Fie $J \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat şi $f, g : J \to \mathbb{R}$ două funcţii având proprietăţile:

1) f admite primitive;
2) g e derivabilă şi cu derivata mărginită.

Atunci funcţia $f \cdot g$ admite primitive pe J.

Demonstraţie: Fie F o primitivă pentru f. Atunci funcţia $F \cdot g$ este derivabilă şi $(F \cdot g)' = f \cdot g + F \cdot g'$, deci $f \cdot g = (F \cdot g)' - F \cdot g'$. Cum funcţia g' are primitive şi e mărginită, iar F e continuă, din teorema lui Wilkosz deducem că funcţia $F \cdot g'$ are primitive şi atunci $f \cdot g$ are primitive (diferenţă de două funcţii primitivabile).

1.19. Exemplu. Arătaţi că funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} \ln(x^2+4) \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ are primitive pe $\mathbb{R}$.

Soluţie: Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $g(x) = \ln(x^2 + 4)$. Deoarece f are primitive şi g e derivabilă cu derivata continuă pe $\mathbb{R}$, deducem că funcţia $h = f \cdot g$ are primitive pe $\mathbb{R}$.

Fie $I_n = \int_0^1 f(x)\cdot f(nx)dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\cdot f(nx)dx$. Cum $f \geq 0$ și continuă, aplicând prima formulă de medie, va exista $c_k \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ astfel încât:

$$J_k \overset{\text{not.}}{=} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\cdot f(nx)dx = f(c_k)\cdot \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(nx)dx.$$

Cu schimbarea de variabilă $n \cdot x = t$, obținem:

$$J_k = \frac{1}{n}\cdot f(c_k)\cdot \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt = \frac{1}{n}\cdot f(c_k)\cdot \int_0^1 f(t)\,dt.$$

Ca urmare,

$$I_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\cdot f(c_k)\cdot \int_0^1 f(t)dt\right) = \int_0^1 f(t)dt\cdot \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot f(c_k) \underset{n\to\infty}{\to} \int_0^1 f(t)dt\cdot \int_0^1 f(t)dt = \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2.$$

PROBLEME DE OLIMPIADĂ

4.O.1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă și F o primitivă pentru f. Arătați că există un punct $c \in (a, b)$ astfel încât:

$$F(c)\cdot f(a+b-c) = f(c)\cdot F(a+b-c).$$

4.O.2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și funcțiile continue $f, g : [a, b] \to (0, \infty)$. Arătați că există $c \in (a, b)$ astfel încât:

$$\frac{\int_c^b f(x)dx}{\int_a^c g(x)dx} = \frac{f(c)}{g(c)}.$$

4.O.3. Fie $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcție continuă și cu proprietatea că există:

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x f(t)\,dt = a \in \mathbb{R}.$$

Arătați că există șirul crescător de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel ca $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ și $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f(a_k)\right) = a$.

4.O.4. Se consideră $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă, cu derivata continuă pe $[0, 1]$. Arătați că există $c \in [0, 1]$ astfel încât:

$$\int_0^1 f(x)dx = f(0) + \frac{1}{2}f'(c).$$

b) există $a \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ astfel încât $\int_0^a f(x)\cdot \sin x\, dx = \int_0^a f(x)\cdot \cos x\, dx$.

Olimpiada județeană, 2013

4.O.12. Determinați toate funcțiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică simultan condițiile:

i) există $\lim_{x\to\infty} f(x) \in \mathbb{R}$;

ii) $f(x) = \int_{x+1}^{x+2} f(t)\, dt$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Mihai Piticari, Olimpiada județeană, 2007

4.O.13. Fie f : [0, 1] $\to \mathbb{R}$ o funcție continuă astfel încât $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx$.

Arătați că există $c \in (0, 1)$ astfel încât $f(c) = \int_0^c f(x)dx$.

Olimpiada județeană, 2008

4.O.14. Fie f: $[0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcție continuă și $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ o primitivă a lui f cu $F(0) = 0$. Arătați că, dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, atunci există $c \in [1, n]$ astfel încât:

$$\int_1^c f(\ln x)dx = F(\ln n).$$

4.O.15. Se consideră $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și funcția derivabilă f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ astfel încât $\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(a)$. Arătați că există $c \in (a, b)$ astfel încât $f(c) - f(a) = f'(c)$.

Dan Nedeianu

SOLUȚIILE PROBLEMELOR DE OLIMPIADĂ

4.S.1. Fie $h : [a, b] \to \mathbb{R}$, $h(x) = F(x) \cdot F(a + b - x)$. Rezultă că $h(a) = F(a) \cdot F(b) = h(b)$. Cum h e derivabilă pe (a, b) și h e continuă pe $[a, b]$, din teorema lui Rolle rezultă că există $c \in (a, b)$ astfel încât $h'(c) = 0$.

Cum $h'(c) = f(x) \cdot F(a + b - x) - F(x) \cdot f(a + b - x)$, relația anterioară devine $f(c) \cdot F(a + b - c) - F(c) \cdot f(a + b - c) = 0$, deci are loc egalitatea cerută.

4.S.2. Fie $F, G : [a, b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_b^x f(t)dt$ și $G(x) = \int_a^x g(t)dt$.

Cum funcția $F \cdot G : [a, b] \to \mathbb{R}$ e derivabilă și $(F \cdot G)(a) = (F \cdot G)(b) = 0$, rezultă din teorema lui Rolle existența unui punct $c \in (a, b)$ astfel încât $(F \cdot G)'(c) = 0$. Atunci: